MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ENA – 2021 – Prova Discursiva Online – Gabarito

Questão 1 [5,00]

Paulo fez 3 provas de Matemática, onde a primeira prova teve peso 1 a segunda peso 2 e a terceira peso 2, obtendo a média ponderada igual a 6,4. Sabendo que a média aritmética das 3 provas foi igual a 6 e a média aritmética das duas primeiras foi igual a 5, determine as notas de cada prova.

Solução

Indicando por n_1, n_2 e n_3 as notas das três provas temos que

$$n_1 + 2n_2 + 2n_3 = 5 \cdot 6,4 = 32$$
$$n_1 + n_2 + n_3 = 3 \cdot 6 = 18$$
$$n_1 + n_2 = 2 \cdot 5 = 10$$

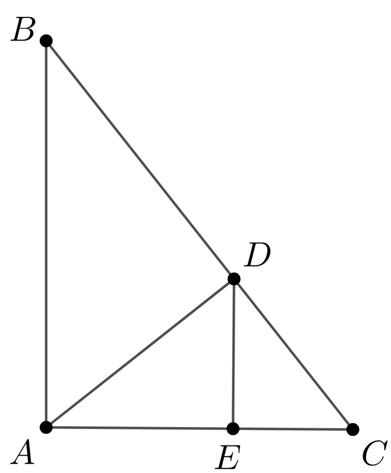
Logo, $n_3 = 18 - 10 = 8$. Daí,

$$n_1 + 2n_2 = 32 - 16 = 16$$

Portanto, $n_2 = 6$ e $n_1 = 4$.

Questão 2 [5,00 :: (a)=2,00; (b)=3,00]

Todos os triângulos representados na figura abaixo são triângulos retângulos.



Sabendo que $\overline{BD} = 3\overline{AE}$:

(a) Determine o valor da razão $\dfrac{\overline{DC}}{\overline{EC}}$.

(b) Calcule o seno do ângulo $A\hat{D}E$.

Solução

(a) Observe que BA e DE são paralelos, então aplicando o teorema de Tales, temos que

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} = \frac{3\overline{AE}}{\overline{AE}} = 3.$$

(b) Por causa das semelhanças entre os triângulos ADE e DCE, os ângulos $A\hat{D}E$ e $D\hat{C}E$ são congruentes. Sabemos, pelo item (a), que

$$\cos D\hat{C}E = \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} = \frac{1}{3}.$$

Logo, como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para todo θ, podemos afirmar que

$$\operatorname{sen}^2 A\hat{D}E = 1 - \cos^2 A\hat{D}E = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Portanto

$$\operatorname{sen} A\hat{D}E = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Questão 3 [5,00]

Determine todos os inteiros positivos n que satisfazem a inequação

$$\frac{n^2 + 206}{n} < 105.$$

Solução

Sendo $n > 0$, tem-se que $\dfrac{n^2+206}{n} < 105$ equivale a inequação $n^2 + 206 < 105n$.

Como $n^2 + 206 < 105n \iff n^2 - 105n + 206 < 0 \iff (n-2)(n-103) < 0$ concluímos que $2 < n < 103$.

Portanto, o conjunto solução é $S = \{3, 4, \ldots, 102\}$.

Questão 4 [5,00 :: (a)=2,00; (b)=3,00]

Seja $|x|$ o valor absoluto do número real x.

(a) Em que condições teremos $|a + b| = |a| + |b|$?

(b) Determine os números reais x tais que $|-3x + 5| + |4x - 3| = |7x - 8|$.

Solução

(a) Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$, então $a + b \geqslant 0$ e assim $|a| + |b| = a + b = |a + b|$.
Se $a \leqslant 0$ e $b \leqslant 0$, então $|a| + |b| = -a + (-b) = -(a + b) = |a + b|$, pois $a + b \leqslant 0$.
Se a e b tiverem sinais contrários, o resultado é falso. Suponha, sem perda de generalidade, que $a < 0$ e $b > 0$. Então $0 < |a| + |b| = -a + b$ e assim $|a| + |b| \neq |a + b|$, pois $|a + b| = a + b$ se $a + b \geqslant 0$ e $|a + b| = -(a + b)$ se $a + b < 0$.
Concluímos que devemos ter $a \cdot b \geqslant 0$.

(b) Observe que a igualdade pode ser escrita da seguinte forma:

$$|3x - 5| + |4x - 3| = |7x - 8|$$

e usando o item (a), basta resolvermos a inequação $(3x - 5)(4x - 3) \geqslant 0$.

Logo a resposta é $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant \dfrac{3}{4}$ ou $x \geqslant \dfrac{5}{3}$.

Questão 5 [5,00]

Bete deseja colorir o mapa da América do Sul, que é constituído de 13 países, como mostra a figura. Para isso ela dispõe de 4 cores distintas: amarelo, cinza, rosa e vermelho. Sabendo que dois países vizinhos não podem ser coloridos com a mesma cor e que ela já pintou o Brasil e o Chile de cinza, de quantas maneiras diferentes ela pode pintar os 11 países restantes?

Solução
A ordem segundo a qual Bete escolhe pintar os países produz diferentes estratégias de contagem, para que isso fique claro, vamos apresentar aqui duas soluções distintas, as quais diferirão justamente em função dessa ordem escolhida.

SOLUÇÃO 1
Colorindo Guiana Francesa, Suriname, Guiana, Venezuela, Colombia, Peru, Bolívia, Paraguai, Argentina, Uruguai e Equador, nessa ordem.

Para a Guiana Francesa temos apenas 3 cores disponíveis, já que faz fronteira com o Brasil, o qual está pintado de cinza. Do Suriname até o Paraguai teremos apenas 2 cores disponíveis para cada país, pois não podemos pintá-los com a cor utilizada para colorir o país que, pela sequência dada, veio antes daquele que se pretende pintar nem podemos usar a cor cinza, usada para pintar o Brasil, que faz fronteira com todos os países citados. Note que Peru e Bolívia, fazem também fronteira com o Chile, mas isso não é problema, já que o Chile está colorido de cinza, tal qual o Brasil, não afetando a quantidade de cores disponíveis. Para Argentina, haverá apenas 1 escolha possível, pois Brasil e Chile já estão pintados de cinza e os outros dois vizinhos já pintados, Bolívia e Paraguai, certamente estão pintados de cores diferentes, já que fazem fronteira com o Brasil e também entre si. Quanto ao Uruguai e ao Equador, cada um deles terá apenas 2 cores disponíveis para ser pintado, já que ambos possuem apenas dois países fronteiriços já coloridos com cores distintas. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC), o números de formas distintas para colorir o mapa será dado pelo produto do número de possibilidades de cada etapa do processo de decisão sobre como colorir o mapa, isto é, $3 \cdot 2^7 \cdot 1 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^9 = 1536$.

SOLUÇÃO 2
Colorindo Guiana Francesa, Suriname, Guiana, Venezuela, Colombia, Equador, Peru, Bolívia, Paraguai, Argentina e Uruguai, nessa ordem.

Embora esta ordem de escolha possa parecer mais natural que a primeira, no sentido de que percorremos o mapa escolhendo os países rodeando o Brasil de cima para baixo, o fato de o Equador não fazer fronteira com o Brasil nem com o Chile exigirá de nós, como veremos, um cuidado adicional quando formos colorir o Peru.

Para colorir os países da Guiana Francesa até Colômbia, o raciocínio será análogo ao utilizado na SOLUÇÃO 1, ou seja, teremos $3 \cdot 2^4 = 48$ possibilidades. Para colorir o Equador, temos 3 possibilidades, já que o único vizinho já colorido será a Colômbia. Mas quantas possibilidades temos para colorir o Peru? Isso depende. A cor escolhida para colorir o Equador foi ou não a cor cinza? Se a resposta for afirmativa, temos 2 maneiras de colorir o Peru. Se a resposta for negativa, há apenas

1 cor disponível, já que não podemos colorir o Peru de cinza (pois faz fronteira com Brasil e Chile) nem com as duas cores utilizadas para colorir o Equador e a Colômbia. Assim, precisamos dividir nossa SOLUÇÃO 2 em dois casos:

CASO 1: Equador foi pintado de cinza.

Já vimos que há 48 formas de pintar os países que precedem o Equador na sequência. Para o Equador há 1 única possibilidade: cinza. Para o Peru, como já visto, há 2 possibilidades. Para colorir os países restantes, obedecendo a sequência, o raciocínio é idêntico ao da SOLUÇÃO 1. Logo, neste caso, o PFC nos garante que há $48 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 1 \cdot 2 = 768$ formas para colorir o mapa.

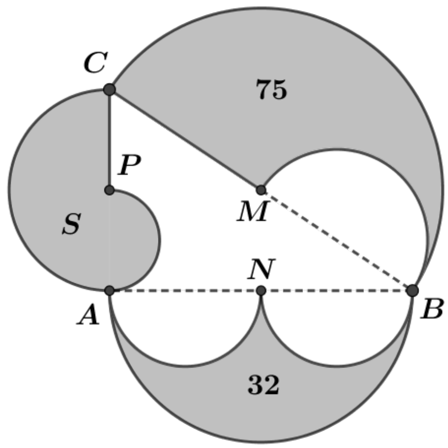
CASO 2: Equador não foi pintado de cinza.

Novamente, aqui temos 48 formas de pintar os países que precedem o Equador na sequência. Para o Equador, agora há 2 possibilidades. Para o Peru, como já visto, há 1 possibilidade apenas. Para colorir os países restantes, obedecendo a sequência, o raciocínio é novamente idêntico ao da SOLUÇÃO 1. Logo, neste caso, o PFC nos garante que há $48 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 1 \cdot 2 = 768$ formas para colorir o mapa. Curiosamente, o mesmo resultado do CASO 1.

Pelo Princípio aditivo, quando surgem caminhos alternativos (grupos sem interseção) no processo de contagem, devemos somar o número de possibilidades de cada caso, ou seja, o número total de formas para colorir o mapa na SOLUÇÃO 2 será, como esperado, o mesmo da SOLUÇÃO 1, isto é, $768 + 768 = 1536$.

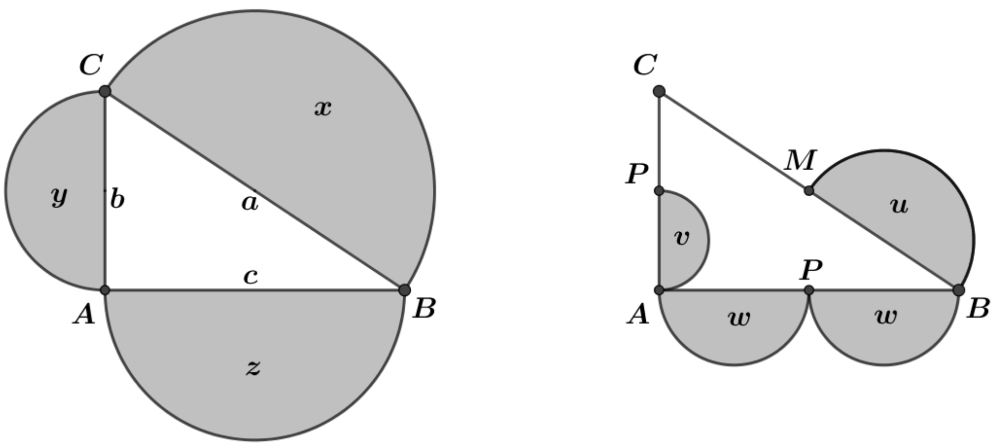
Questão 6 [5,00]

Na figura abaixo, todos os arcos são semicírculos, o ângulo $B\hat{A}C$ é reto, e M, N e P são os pontos médios dos segmentos BC, AB e AC, respectivamente. Determine a área destacada S, a partir do valor das outras duas áreas destacadas.



Solução

Considere as seguintes notações para as medidas dos lados e para as áreas dos semicírculos da questão:



Note que semicírculos de mesmo diâmetro terão mesmo raio e, consequentemente, mesma área.
Como $a^2 = b^2 + c^2$, pelo Teorema de Pitágoras, teremos que $x = y + z$. De fato,

$$x = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}\pi\frac{b^2+c^2}{2^2} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = y + z.$$

Além disso, cada um dois semicírculos menores tem área igual a $\frac{1}{4}$ do semicírculo maior correspondente. De fato, a área de um semicírculo de raio $\frac{r}{2}$ é $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)$, ou seja, $\frac{1}{4}$ da área $\frac{1}{2}\pi r^2$ do semicírculo de raio r.

Com isso, $u = x/4$, $v = y/4$ e $w = z/4$. e

$$x = 75 + u = 75 + \frac{x}{4} \therefore x = 75 + \frac{x}{4} \therefore x - \frac{x}{4} = 75 \therefore \frac{3x}{4} = 75 \therefore x = 100.$$

$$z = 32 + w + w = 32 + \frac{z}{4} + \frac{z}{4} \therefore z = 32 + \frac{z}{2} \therefore z - \frac{z}{2} = 32 \therefore \frac{z}{2} = 32 \therefore z = 64.$$

Como $x = y + z$, temos $100 = y + 64$, logo $b = 36$. A área S procurada é dada por

$$S = y + v = y + \frac{y}{4} = 36 + \frac{36}{4} = 45.$$